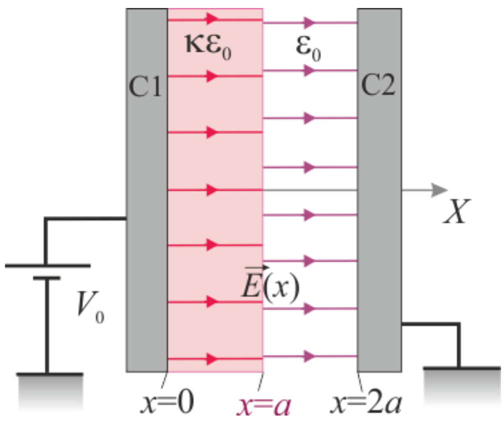
# 1 Enunciado

Dos cuerpos conductores,$C_1$ y $C_2$, presentan sendas superficies planas, perpendiculares al eje $OX$, que coinciden con los planos geométricos $\Pi_1$:$x = 0$ y con $\Pi_2$:$x = 2a$. La distancia de separación, $2a$, es significativamente menor que las dimensiones de los planos conductores. La región correspondiente a $0 < x < a$ está ocupada por un dieléctrico lineal de constante dieléctrica $\kappa$, mientras que la comprendida en el intervalo $a < x < 2a$ está rellena de aire. El conductor $C_1$ está conectado a un generador cuya f.e.m. tiene un valor constante $V_0$, y el $C_2$ a tierra. Esta diferencia de potencial entre los conductores determina la presencia de un campo eléctrico en la región dieléctrica que los separa, y cuya expresión es:




$$\vec{E}(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{E_0}{\kappa}\,\vec{\imath}; & \text{si } \ 0 < x < a \\ \\ E_0\,\vec{\imath}; & \text{si } \ a < x < 2a \end{cases}$$

1. ¿Cómo son las superficies equipotenciales entre los dos conductores? Indique de qué forma varía el valor del potencial de dichas superficies.
2. ¿Qué relación existe entre los valores $V_0$ y $E_0$? Obtenga la función $V(x)$ que describe cómo es el valor del potencial en la región $0 \leq x \leq a$ (dieléctrico lineal), y en $a \leq x \leq 2a$ (aire).

# 2 Solución

Planteamiento

Toda distribución de cargas eléctricas estáticas produce una perturbación eléctrica en el espacio que puede ser descrita mediante sendos campos: el **campo eléctrico** $\vec{E}(\vec{r})$, de naturaleza vectorial; o el campo escalar **potencial electrostático** $V(\vec{r})$. La primera de estas magnitudes físicas se define como la fuerza eléctrica que por unidad de carga experimentaría una carga puntual situada en el punto $P$ del espacio, determinado por el radiovector $\vec{r}$. Y puesto que dicho fuerza es conservativa, es posible definir la energía potencial electrostática de una carga puntual cuando se encuentra sometida a la acción de las cargas que crean la perturbación eléctrica analizada. El potencial eléctrostatico $V(\vec{r})$ es la energía potencial que por unidad de carga tendría una carga puntual situada en el punto $P$, dado por el radio vector $\vec{r}$.

Ambas magnitudes físicas son dos formas de expresar los efectos producidos por una determinada distribución de carga, que se relacionan a partir de la definición de **diferencia de potencial**: los campos $\vec{E}(\vec{r})$ e $V(\vec{r})$ creado por una determinada distribución de carga eléctrica en un región del espacio son tales que la diferencia entre los valores del potencial entre dos puntos $A$ y $B$ de dicha región es igual a la circulación (o integral de camino) del campo eléctrico entre dichos puntos:

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Y puesto que el campo eléctrico es una magnitud física, su módulo ha de ser una cantidad finita expresable mediante un número real. Por tanto, si consideramos dos puntos, $P$ y $P'$, separados una distancia infinitesimal, entonces se cumplirá,

$$V(P') = V(P) + \mathrm{d}V, \quad \text{tal que} \quad \mathrm{d}V = -\,\vec{E}(P) \cdot \mathrm{d}\vec{r},$$

siendo $\mathrm{d}\vec{r}$ el vector de módulo infinitesimal que determina la posición de $P'$, respecto de $P$. Este resultado permite identificar al vector campo eléctrico como el vector opuesto al gradiente del potencial eléctrostático en dicho punto.En terminos del operador nabla, se tendrá:

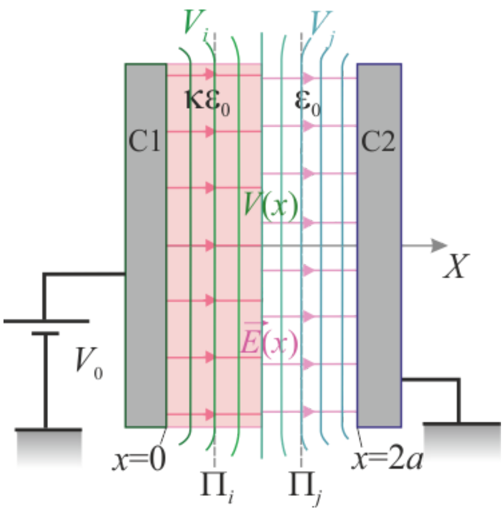
$$\vec{E}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,[V(\vec{r})] = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$$

Por tanto, el campo eléctrico en un punto es un vector que indica la dirección y el sentido en que se verifica la máxima disminución del valor del potencial, y cuyo módulo es la variación por unidad de longitud del potencial en el entorno de dicho punto. Por otra parte, si desde el punto $P$ nos desplazamos a puntos infinitamente próximos situados en la misma superficie equipotencial, la variación del potencial va a ser nula; por tanto, en general se tendrá que **el campo eléctrico en $P$ va a ser perpendicular al plano tangente a la superficie equipotencial en dicho punto**.

Para la resolución del ejercicio propuesto resulta especialmente interesante esta interpretación de campo eléctrico y potencial. Si se utilizan las coordenadas cartesianas para la descripción analítica del espacio, con el punto $O$ como origen del sistema de referencia $OXYZ$, y de manera que para un punto $P$ del espacio, se tendrá que:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k} \implies \left\{ \begin{array}{c} \vec{E}(\vec{r}) = E_x(x,y,z)\,\vec{\imath} + E_y(x,y,z)\,\vec{\jmath} + E_z(x,y,z)\,\vec{k} \\ V(\vec{r}) = V(x,y,z) \end{array} \right\}, \text{ tal que } \vec{E}(x,y,z) = -\frac{\partial V}{\partial x}\,\vec{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\,\vec{\jmath}$$

### 2.1 Potencial electrostático y superficies equipotenciales




Como sabemos, las superficies conductoras en condiciones electrostáticas, son superficies equipotenciales. Es decir, al estar el conductor $C_2$ conectado a *tierra*, el potencial en todos los puntos de la superficie $\partial C_2$ tendrá el valor de referencia, que tomaremos como valor nulo. Por su parte, si el conductor $C_1$ está conectado al electrodo *activo* de un generador electrostático de f.e.m. $V_0$, respecto del valor de referencia, todos los puntos de la superficie $\partial C_1$ estarán a aquél valor de potencial. En particulas las superficies planas $\Pi_1$ y $\Pi_2$ de dichos conductores serán superficies equipotenciales con valores de potencial $V_0$ y 0, respectivamente:

$$V(\vec{r})\big]_{\Pi_1} = V(x=0) = V_0; \qquad V(\vec{r})\big]_{\Pi_2} = V(x=2a) = 0$$

Por otra parte, en el enunciado se informa de que en cualquier punto $P$ situado entre ambos planos, el campo eléctrico tiene la dirección paralela al eje $OX$. Por tanto, las superficies equipotenciales van a ser los planos perpendiculares al vector unitario cartesiano $\vec{\imath}$, que son planos formados por puntos que tienen igual componente "$x$". La comprobación es sencilla: sea $\Pi_i$ el plano formado por todos aquellos puntos con igual valor $x_i$ en la coordenada "$x$". El vector desplazamiento entre dos puntos infinitamente próximos de dicho plano no va a tener componente en la dirección del eje $OX$; por tanto, dicho vector será perpendicular al campo eléctrico en cualquiera de ellos, y no habrá variación del potencial entre ambos. En consecuencia, el potencial tendrá el mismo valor $V_i$ en todos los puntos del plano $\Pi_i$:

$$\boxed{P(x_i,y,z) \in \Pi_i:\ x = x_i, \text{ tal que } \mathrm{d}\vec{r}\big]_{\Pi_i} = \mathrm{d}y\,\vec{\jmath} + \mathrm{d}z\,\vec{k} \perp \vec{E}(P) \| \vec{\imath} \implies \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{d}V\big]_{\Pi_i} = -\vec{E}(P)\cdot \mathrm{d}\vec{r}\big]_{\Pi_i} = 0 \\ V(x,y,z)\big]_{\Pi_i} = V(x=x_i) = V_i, \text{ cte.} \end{array} \right.}$$

Es decir, las superficies equipotenciales en el sistema electrostático bajo estudio son cada uno de los planos $\Pi_i$ paralelos a las superficies conductoras $\Pi_1$ y $\Pi_2$, al menos en el espacio comprendido entre dichos planos, y tanto en la región rellena de dieléctrico lineal ($0 \le x \le a$), como en la de aire ($a \le x \le 2a$), como en la . Además, los valores del potencial en cada uno de estos planos disminuyen en la dirección y el sentido indicado por el campo eléctrico, desde el valor $V_0$, hasta el valor $0$. Asumiendo que $E_0 > 0$, se tendrá:

$$\left. \begin{array}{l} V\big]_{\Pi_i} = V(x=x_i) = V_i \\ V\big]_{\Pi_j} = V(x=x_j) = V_j \end{array} \right\} \implies \boxed{0 \le x_i < x_j \le 2a \iff 0 \le V_j < V_i \le V_0}$$

### 2.2 Expresión del potencial electrostático

Los resultados discutidos en el apartado anterior en relación con las superficies equipotenciales, pueden ser constrastados con la obtención de la expresión analítica correspondiente a la función del campo para el potencial electrostático, $V(\vec{r}) = V(x,y,z)$, en los puntos $P(x,y,z)$ comprendidos entre los planos $\Pi_1$ y $\Pi_2$. Utilizando la expresión del campo eléctrico como el vector opuesto al gradiente del potencial, obtenemos el conjunto de ecuaciones diferenciales que permiten determinar la función potencial electrostático:

$$0 \le x \le 2a; \quad \vec{E}(x,y,z) = E(x)\,\vec{\imath} = -\frac{\partial V}{\partial x}\,\vec{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\,\vec{\jmath} - \frac{\partial V}{\partial z}\,\vec{k} = -\vec{\nabla} V \implies \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial x} = -E(x) \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

En primer lugar, las anteriores ecuaciones diferenciales en derivadas parciales indican que en ambas regiones dieléctricas comprendidas entre las superficies conductoras $\Pi_1$ y $\Pi_2$, el potencial electrostático es exclusivamente función de la coordenada "$x$":

$$\forall\, P(x,y,z),\ \text{ con }\ 0 \le x \le 2a \implies V(P) = V(x),\ \text{ tal que...}\ \left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right]_{P(x,y,z)} = -E(x) = \begin{cases} -\dfrac{E_0}{\kappa}, & \text{si}\ \ 0 < x < a \\ -E_0, & \text{si}\ \ a < x < 2a \end{cases}$$

Obsérvese que, en consecuencia, el valor del potencial será idéntico en todos los puntos que tenga igual valor en la coordenada cartesiana "$x$"; es decir, las superficies equipotenciales entre los conductores coincidirán con los planos cartesianos $\Pi_i : x = x_i$, constante. Por otra parte, la relación que deben verificar potencial y campo eléctrico establece que la derivada de la función potencial con respecto a la variable "$x$" presenta valores constantes distintos en las regiones de dieléctrico lineal y de aire. En cualquier caso, el potencial va a presentar un comportamiento lineal con respecto a dicha coordenada cartesiana, pero correspondiéndole funciones distintas en cada uno de esos medios:

$$\left.\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}\right]_{0<x<a} = -\frac{E_0}{\kappa} \implies V(x) = -\int \frac{E_0}{\kappa}\,\mathrm{d}x \ + \ A = -\frac{E_0}{\kappa}\,x \ + \ A,\ \ \text{si}\ \ 0 \le x \le a$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}\right]_{a<x<2a} = -E_0 \implies V(x) = -\int E_0\,\mathrm{d}x \ + \ B = -E_0\,x \ + \ B,\ \ \text{si}\ \ a \le x \le 2a$$

donde $A$ y $B$ son constantes a determinar, en función de la geometría y las propiedades eléctricas del sistema. Para ello, se exige que se verifiquen las condiciones de contorno impuestas en los planos conductores $\Pi_1 : x = 0$ y $\Pi_2 : x = 2a$,

$$\left.\begin{aligned} V\big]_{\Pi_1} = V_0 &\implies V(x=0) = A = V_0 \\ V\big]_{\Pi_2} = 0 &\implies V(x=2a) = -2a\,E_0 \ + \ B = 0 \end{aligned}\right\} \implies \boxed{V(x) = \begin{cases} -\dfrac{E_0}{\kappa}\,x \ + \ V_0, & \text{si}\ \ 0 \le x \le a \\ -E_0\,x \ + \ 2a\,E_0, & \text{si}\ \ a \le x \le 2a \end{cases}}$$

Relación entre los valores $E_0$ y $V_0$

Para obtener dicha relación exijimos que se verifique una condición más: la condición de continuidad para el potencial en la interfaz dieléctrico-vacío localizada en el plano $\Pi_3 : x = a$,

$$\left.\begin{aligned} V(x=a^-) &= -\frac{E_0}{\kappa}\,a \ + \ V_0 \\ V(x=a^+) &= E_0\,a \end{aligned}\right\} \quad \boxed{V(x=a^-) = V(x=a^+) \implies V_0 = \left(\frac{1}{\kappa} + 1\right) E_0\,a}$$